

特別賞

デジタルアニーラシステムの開発と  
顧客実問題への適用

～様々な社会課題に内在する組合せ最適化問題の早期求解を目指して～

富士通株式会社

米岡 昇 片山 健太郎 橋間 正芳  
中山 寛 宮澤 俊之

## 1. 緒 言

過去50年、アプリケーションの複雑化、データの増大に伴う要求演算性能の増大を解決してきた汎用プロセッサの性能向上は、それを支えてきた半導体微細化の鈍化とともに終焉を迎えつつある。一方で、種々のアプリケーションで必要とされる演算量は増加の一途を辿っており、演算性能を持続的に向上させていくことが大きな課題となっている。この課題に向けて、アプリケーションドメインに特化した専用のアクセラレータを実現・提供することが解決の一つの方法となっている。これらドメイン特化型の技術が有効となる分野の一つとして組合せ最適化があげられる。組合せ最適化は、流通コスト最小化、高効率な生産計画など様々な社会課題の中に内在しており、制約条件を満足する解候補の中から最良の組合せを見つける、という一般的にはNP困難<sup>1</sup>に属する問題を解く分野である。この難易度が高い組合せ最適化問題を求解するためのドメイン特化技術の一つにイジングマシンがある。

イジングマシンは、磁性体モデルの一つであるイジングモデルを基に組合せ最適化問題を表現する二次の目的関数を定義し、その目的関数の値を最小化するスピン状態の組合せを探索するものである。2011年のカナダのD-Wave Systems 社による量子アニーラ[1]の開発を皮切りに、組合せ最適化問題の求解にイジングマシンを適用する取り組みが盛んになっている。量子アニーラは基本アルゴリズムとして、1998年に門脇、西森によって原理提案された量子アニーリング法[2]を採用しており、量子力学的な揺らぎを横磁場項として導入して量子断熱計算を行うことで高速に最適解探索を行う。しかし、量子アニーラは超伝導素子間の結合数、結合係数の階調に対して構造・精度上の制約があり実用問題への適用には課題が残っている[3]。

一方で、近年、量子アニーラのハードウェア的な制約を克服した量子インスパイアード技術に注目が集まっている。この技術の特徴は、制約なし二値変数二次計画問題(Quadratic Unconstrained Binary Optimization: QUBO)定義による汎用性とイジングマシンによる高速性を両立する点にある。これまでに、日立製作所が開発した疑似焼きなまし法を基にしたCMOS アニーリングマシン[4, 5]、光パラメトリック発振器の二つの発振状態をスピンと見立てたNTTのCoherent Ising Machine (CIM) [6]、シミュレーテッド分岐アルゴリズムを用いた東芝のSimulated Bifurcation Machine (SBM) [7]などが開発されており、競争が激化している。

デジタルアニーラ(Digital Annealer: DA)は、実用的な組合せ最適化問題の求解に向けて富士通が開発した量子インスパイアード技術である。その特徴は、QUBOの形に落とし込まれた組合せ最適化問題の最適解をMarkov Chain Monte Carlo (MCMC)法を用いた確率的な手法で探索するアーキテクチャにある。第一世代DAは二値変数が1,024ビットまでの問題に対応し、2018年に商用サービスが開始され、専用プロセッサ(Digital Annealing Unit: DAU)である第二世代DAにより、対応可能な問題規模を8,192ビットまで拡大した[8, 9]。DAUは、MCMC法を基にレプリカ交換アルゴリズム[10]などの解探索技術を取り込み、並列回路に実装した専用ハードウェアであり、高速なビット反転操作と64bitの高階調な結合係数の表現によって高い解探索性能を実現している[9]。

イジングマシンで使用する目的関数は、解となるスピンの状態を二値変数 $x_i \in \{0, 1\}$ に変換したQUBOとして、式(1)の $E(x)$ のように定義することが一般的である。

---

<sup>1</sup> 計算量理論上の分類で、多項式時間で解くことが出来るNP(Non-deterministic Polynomial)に属する問題と同等以上に難しい問題を指す。例として、ナップザック問題や巡回セールスマン問題などがある。

$$E(x) = \sum_{i < j} J_{ij} x_i x_j + \sum_i h_i x_i + c \quad (1)$$

ここで、 $J_{ij}$  は  $i$  番目と  $j$  番目のビット間の結合係数、 $h_i$  は  $i$  番目のビットにおけるバイアス、 $c$  は定数項、を表す。QUBOを用いて実問題の求解をする場合、変数の間に様々な制約条件が発生する。このため制約を満足する解を探索する場合、制約違反があるとそれに応じて  $E(x)$  が増加するような制約項を二値二次形式で表現し、後述する式(2)のようにコスト項と制約項をひとつのQUBOとして求解することが一般的である。しかしながら、制約条件の数や変数規模の増大に伴い最適解や近似解への到達が非常に難しくなるという課題があった。

本稿では、上記課題を解決し、DAを実用規模の組合せ最適化問題に適用するためのデジタルアニーラシステム (DAシステム) について述べる。そして、制約条件に対応した探索コアであるアニーリングコアについて記し、制約付き問題の例として、詳細を3.1章にて後述する二次割当問題 (Quadratic Assignment Problem : QAP) における性能優位性を示す。また本システムは顧客の実問題への適用が進んでおり、自動車専用船への積み付け問題を事例として紹介する。

## 2. DAシステム

### 2.1 概要

世の中に存在する様々な社会課題には、多様な制約条件を持った様々な規模の組合せ最適化問題が内在する。イジングマシンはこれらの組合せ最適化問題の中で、二値変数二次形式で表現することが出来る問題を解くために利用される。組合せ最適化問題では、問題を表現するコスト項と多様な制約を表現した制約項が扱われる。問題表現の自由度を保持するためには、全ビット間の結合を処理可能な全結合構造の実現が重要であり、これは制約条件を満足する制約充足解を評価する場合にも必要である。

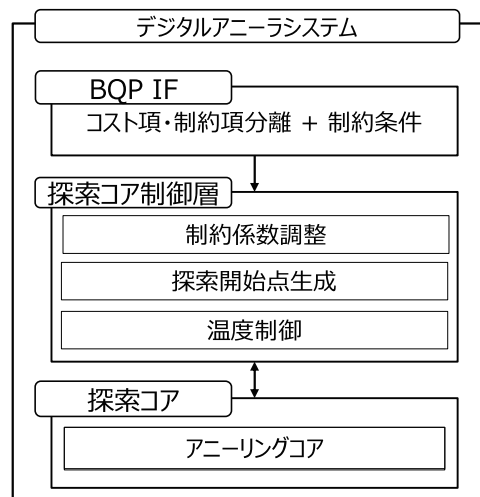


図1 DAシステムの構成

これらの実現に向けて、我々はイジングマシンによる高速な二値変数二次形式問題の解探索を行う大規模なアニーリングコアと、それを制御するソフトウェアから成るDAシステムを作成した。DAシステムは、問題の入力である Binary Quadratic Programming (BQP) に対応したBQP IF、探索コア制御層、探索コア、の三要素からなる(図1)。BQP IFは二値変数二次形式で表現されたコスト項と制約項をそれぞれ分離して入力可能としている。探索制御部は、最適化において探索コアを適切な制約係数、開始状態、温度で動作させるために、制約係数調整機能、探索開始点生成機能、レプリカ温度制御の機能を内部に有している。また探索コア部は二値変数二次形式のコスト項と制約項の最適化を進める100,000ビットまで動作するアニーリングコアを有している。このシステムにより、大規模でかつ制約付き問題を分割無しで高速に処理することを可能にした。以下にて、これらの各機能を説明する。

## 2.2 探索コア部

探索コア部はMCMCに従い解探索を行なうアニーリングコアから成る。アニーリングコアは、BQP IFで設定された制約項や制約条件を活用しながら大規模な解空間を探索する制約活用サーチの機能を提供する。制約活用サーチとは、探索コア制御層で生成された探索開始点を起点に、制約項と自動調整された制約係数による制約違反の影響と、2.4章で後述する1hot(ある特定のグループの二値変数の総和が1という等式制約)や不等式などの制約条件に従い良解を抽出する機能で、MCMCをベースに作られている。図2として第二世代DAとDAシステムの探索コア部分の概略図を示す。DAUではこれまで8,192ビットまでの全結合問題について1ビット反転を繰り返すことにより解探索を実行していたが、DAシステムではアニーリングコアへのGPU適用により、最大100,000ビットまでの問題で1ビット反転による解探索だけでなく、1way1hot制約に対応した2ビット反転と2way1hot制約に対応した4ビット反転による探索が可能となっており、制約付きの問題で大幅な求解性能向上が達成できる。

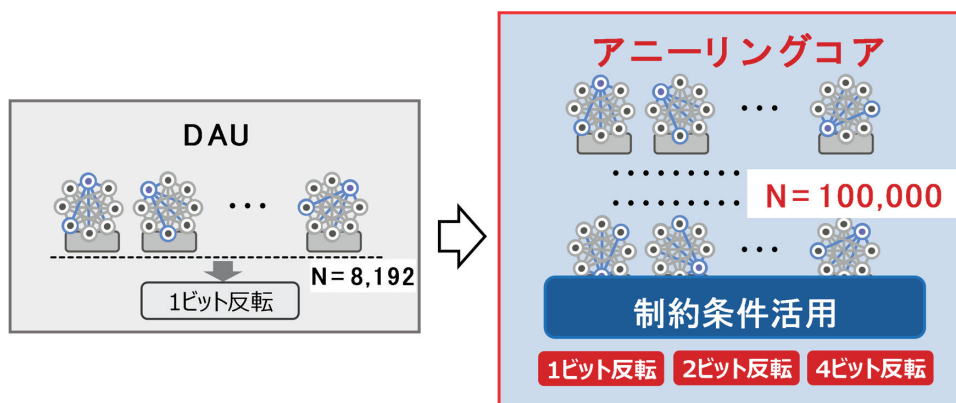


図2 第二世代 DA (DAU) と DA システムの探索コア部

## 2.3 探索コア制御層

探索コア制御層は、求解状況を動的に解析しながら適切なタイミングで探索コアに介入し、探索コアのより効率的な求解処理を実現するソフトウェア層である。主な機能は制約係数調整、探索開始点生成、温度制御である。

制約係数調整は、2.4.1で後述する式(2)に示すコスト項に対する制約項の強さを設定する制約係数 $\alpha$ を動的に変動させながら適切な値に調整する機能である。制約係数は小さすぎると制約違反の解ばかりが出力され、逆に大きすぎると制約違反は発生しにくくなるものの制約自体が強すぎて求解性能が低下する。第二世代 DA 以前では、 $\alpha$ の値を手動で設定し、QUBOを生成してDAで最適化を行い、DAで得られた最良解から $\alpha$ を再決定する、という過程を繰り返すことで適切な制約条件を満足する $\alpha$ を決定する必要があった。しかし、本機能により一度の求解操作で適切な制約係数を内部で自動的に設定することができるようになり、ユーザの利便性が向上し実行時間を大幅に削減することが可能となった。

探索開始点生成は、探索コアが求めた過去の良解群から新たな探索開始点を生成する機能である。求解の状況を解析し、解の更新が滞ったと判断した場合は、ランダム性を考慮した開始点を新たに生成し、大規模な解空間における探索領域の偏りを低減する。

温度制御は、アニーリングコアの動作中の統計情報からMCMC探索の手法であるレプリカ交換法の温度パラメータを適切に調整する機能である。これにより、アニーリングコアのレプリカ交換法を用いたMCMCの求解性能に大きな影響を与えるレプリカ温度の最高温度および最低温度を自動で適切な値に設定可能となる。

## 2.4 BQP IF

DAシステムの特徴のひとつはBQP IFを備えた点にある。BQP IFは、二値変数二次形式で表現されたコスト項と制約項を分離した入力と、実問題で頻出する1hotや不等式制約の情報を入力するIFである。このBQP IFを用いることで、QUBOで表現された制約条件以外の制約を考慮した探索を行うことが可能となり、求解性能向上が期待できる。以下、これを説明する。

### 2.4.1 制約項の分離入力

BQP IFを用いることで、DAシステムは目的関数 $E(x)$ を式(2)のようなコスト項 $C(x)$ 、制約項 $P(x)$ の二つのQUBO データに分離して入力可能とした。

$$E(x) = C(x) + \alpha P(x)$$

$$= \sum_{i < j} J_{ij}^C x_i x_j + \sum_i h_i^C x_i + c^C + \alpha \left( \sum_{i < j} J_{ij}^P x_i x_j + \sum_i h_i^P x_i + c^P \right) \quad (2)$$

ここで $\alpha$ は制約項の制約係数の値、 $J_{ij}^C$ 、 $h_i^C$ 、 $c^C$ は順にコスト項の結合係数、バイアス、定数項であり、 $J_{ij}^P$ 、 $h_i^P$ 、 $c^P$ は順に制約項の結合係数、バイアス、定数項である。このコスト項と制約項のQUBO の分離入力により、システム内部でビット状態ごとにコスト項と制約項の評価値を個別に計算することで、DAU 単体では不可能であった制約違反状態の検出が可能となった。

### 2.4.2 1hot 制約への対応

実用的な組合せ最適化問題で頻出する制約条件として、ある特定のグループの二値変数の総和が1という等式制約がある。DAシステムでは、この総和が1となる等式制約を1hot 制約と称し、1hot 制約の変数グループをBQP IFを用いて明示的に指定することで、より高速

な求解を可能としている。1hot 制約に対しては、図3 に示すように、1方向(横)の変数グループで総和が1 となる1way1hot 制約と、2方向(縦横)の変数グループで総和が1となる2way1hot 制約の両者に対応し、前者はグラフ彩色系の問題、後者は二次割当問題や巡回セールスマン問題などへの適用が可能である。

BQP IFにより1hot 制約のグループ構成のみを明示的に入力することで、1hotの制約条件をデータとして準備する必要が無くなるので、入力データ生成の時間が短縮される。

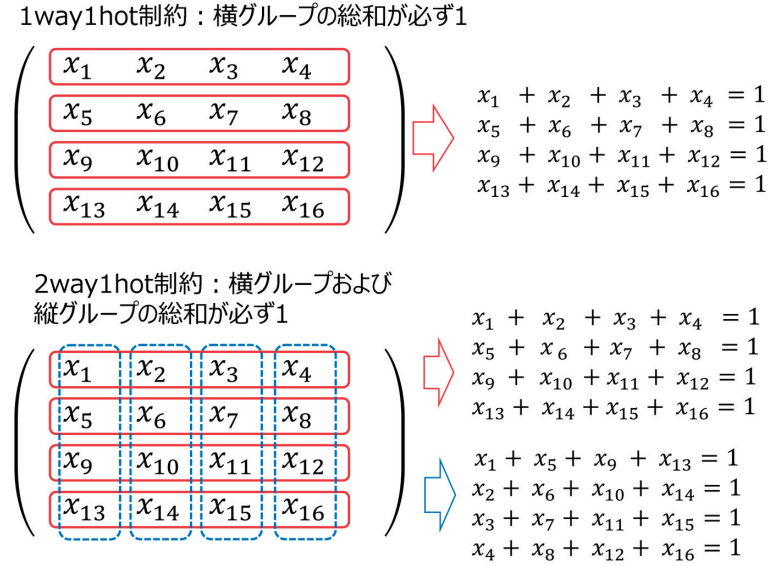


図3 1hot 制約の種類

### 2.4.3 不等式制約への対応

組合せ最適化問題で頻出するもう一つの制約条件として、変数間の関係を不等式で表す不等式制約がある。一般に不等式制約をQUBOで表現する場合は、補助変数と呼ばれる余剰の変数を導入し、不等式をQUBOで表現して求解する[11]。しかし補助変数を導入すると、不等式ごとの適切な重みづけが必要となり、またビット数の増加による求解難易度の上昇が生ずる。そこでDAシステムでは不等式制約への対応として、式(3)のようなk 個の線形の不等式制約の定義を示す行列係数  $a_{ji}$ 、比較値  $b_j$  を直接入力する機能をBQP IFに実装した。

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (3)$$

BQP IFにより式(3)のように不等式を入力することで、不等式の重み付けを設定しながら解探索を行うことに対応した。またこの不等式制約をBQP IFを用いて簡便に表現することで、問題入力に必要な入力データを生成する時間も短くなる。

## 3. DAシステムの性能

この章ではDAシステムの性能について述べる。ここで、DAシステムのアニーリングコアの特徴を反映した評価を行うために、性能評価のための問題としてQAPを用いた。以下

では、このQAPを例として様々なインスタンス、サイズの問題を求解した。

### 3.1 QAPについて

QAP の一例である施設配置問題をあげて定式化の内容を説明する。これは  $n$  個の施設を  $n$  個の場所にそれぞれ割当て際に、施設間に定義される距離とフローの積の総和を最小化する問題である。目的関数のコスト項は以下のように定義出来る。

$$C(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl} \quad (4)$$

$x_{ik}$ : 施設  $i$  を場所  $k$  に配置する場合1、そうでない場合0 をとる二値変数

$f_{ij}$ : 施設  $i$ 、 $j$  間の物資のフロー量

$d_{kl}$ : 場所  $k$ 、 $l$  間の距離

また一つの施設には必ず一つの場所のみ、また一つの場所には必ず一つの施設のみを割当てするというそれぞれの制約は、2way1hot 制約の縦横2グループの1hot 制約として扱うことができる。よって施設配置問題の全体の目的関数  $E(x)$  は、式 (4) の  $C(x)$ 、制約係数  $\alpha$  と 2way1hot を表現した制約項を用いて以下のように書ける。

$$E(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl} + \alpha \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} - 1 \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_{ik} - 1 \right)^2 \right] \quad (5)$$

ここで、本問題における二値変数の二次元配列

$$x = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{nn})$$

を  $n^2$  個の一次元配列に展開し、

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n^2-1}, x_{n^2})$$

と再定義すると式 (5) は係数をまとめ直すことで、式 (1) のような QUBO として一般的に表現できる。しかし、DA システムでは BQP IF を使用することで 1hot のグループを指定して入力することが可能となるため、式 (5) ではなく式 (4) のように 1hot の制約項を QUBO に含める必要がなくなる。この機能によってアニーリングコアが 1hot 制約を満足する状態を探索することが可能となり、求解性能の向上が期待できる。

### 3.2 性能評価

ここでは DA システムの QAP に対する求解性能を示す。DA システムの探索効率を示すため、一つの QAP のインスタンスを対象に、最適化の実行時間に対する目的関数の値 (エネルギー) の降下の様子を観察した。次に、商用ソルバとの求解性能を比較するため、複数の QAP のインスタンスに対し、決められた実行時間で得られた目的関数の値と最適解の目的関数の値との差を評価した。なお性能評価には、CPU: Intel Xeon E5-2690 v4  $\times$  2、メモリ: 448GB、GPU: NVIDIA V100  $\times$  4 を搭載したマシンを使用した。

問題規模に応じた性能変化を評価するため、QAPLIB[12] に含まれるサイズが異なる問題 7 インスタンス (tai80a, tai80b, tai100a, tai100b, tho150, tai150b, tai256c) を DA システムで求解した。なおこの実験ではコスト項と BQP IF を利用した 2way1hot グループの明示的な指定によるデータ取得を実施した。

### 3.3 結 果

表1で示すように、それぞれの問題インスタンスについて、実行時間を600秒に設定し、施設数・場所数  $n$  から決まる問題規模(ビット数)を求めた。また得られた結果については、既知の最適解 (Best known solution: BKS) 値との差 (Gap(%)) の10回の試行の平均値を示し、10回の試行でBKSに到達した試行数 (BKS 到達数) を ( ) 中に記した。このBKS 値とのGapが小さいほど既知の最適解に近く、0%で既知の最適解に到達したことを示す。また比較対象としてGurobi 9.1 [13] およびLocalSolver 10.5 [14] の性能は文献 [15] から調べ表1に記載した。ここでGapは式(6)に従って計算した。

$$Gap = \frac{E_{exp} - E_{BKS}}{E_{BKS}} \times 100 \quad (6)$$

ここで、 $E_{BKS}$ は既知の最低エネルギーであり、 $E_{exp}$ はそれぞれのソルバが到達した最低エネルギーの実験値である。DAシステムは全てのインスタンスで制約充足解が得られたが、Gurobi 9.1およびLocalSolver 10.5は制約充足解を得ることが出来ない(表1のNA 部分) インスタンスがあった。またDAシステムでもtai80a、tai100aについてはBKSに到達しなかったが、いずれのサイズのインスタンスについても3種類のソルバの中で最小のGap 値を示しており、制約充足解が得られた5インスタンス (tai80a、tai80b、tai100a、tai100b、tai150b) についてのGapの平均値がDAシステムは0.23%と、Gurobi 9.1 (14.24%)、LocalSolver 10.5 (1.61%) よりも1桁程度小さくなっていることから、DAシステムが3種類のソルバの中で良好な解に到達することが分かった。このDAシステムのQAPでの高い性能は、制約を含む多くの実問題での有用性を示唆するものである。

| インスタンス           | tai80a        | tai80b     | tai100a       | tai100b    | tho150        | tai150b       | tai256c       |
|------------------|---------------|------------|---------------|------------|---------------|---------------|---------------|
| ビット数             | 6,400         | 6,400      | 10,000        | 10,000     | 22,500        | 22,500        | 65,536        |
| デジタルアニーラ<br>システム | 0.482%<br>(0) | 0%<br>(10) | 0.427%<br>(0) | 0%<br>(10) | 0.000%<br>(8) | 0.095%<br>(3) | 0.041%<br>(2) |
| LocalSolver10.5  | 2.24%         | 0.86%      | 2.05%         | 1.28%      | NA            | 2.6%          | 0.29%         |
| Gurobi9.1        | 8.03%         | 34.01%     | 14.91%        | 33.67%     | NA            | 28.1%         | NA            |

表1 二次割当問題に対する求解結果

## 4. DAシステムの適用事例

前章までで、DAシステムは組合せ最適化問題を解くための種々の機能を有していることを述べた。本章ではDAシステムを実際の顧客問題に適用した際の事例のひとつについて紹介する。

### 4.1 自動車専用船積み付け問題と業務課題

日本郵船様の自動車専用船積み付け問題は、自動車メーカーが製造した自動車を輸送する際に高い効率で専用船に積み付ける問題である。これは、1隻の自動車専用船に数千台もの自動車を搭載する問題であり、自動車の搭載台数、車種および寄港数などにより膨大な積み

付けのパターンが生ずる組合せ最適化問題となる。例えば予め作成された積み付け計画に沿って自動車を1台ずつ決められた間隔で積載する場合、最大積載数7,000台、フロア数13の自動車専用船が十数の港に寄港しながら車高や車幅が異なる60種類以上の車両の積み降ろしを行う際の車両の積み付け方の候補数は、総当たりの計算で10の2,000乗通り以上にもなる。それら膨大なパターンから、最大積載量に近い積載率で車両を積み込みつつ、積み降ろし作業時に安全なスペースを維持する、などの制約条件を満たす解を算出し、積み付け計画に反映することは非常に複雑な作業である。

積み付け計画作成業務における課題は主に二点ある。ひとつは積み付けプランナーが積み付け作業のルールやパターンを習得して計画を作成していたが、プランナーの経験や技量により積み付け計画の品質に差が生じることである。もうひとつは、計画策定までに要する時間が、自動車専用船1隻あたり最大約6時間にも及び、積み付け計画の変更時の業務負荷が多大であることである。

#### 4.2 デジタルアニーラシステムの適用

これらの課題解決に向けて、我々は図4のようにDAシステムを自動車専用船積み付けに適用[16]した。はじめに顧客の社内システムからプランナーが積み込む車両のサイズや積み降ろす港の情報を取り込み、事前に登録している船型データベース(DB)を参照してDAシステムへの入力データを作成する。次に、DAシステムによって最適化を進め、その結果から推奨する席割りプランを提供する。その後、確定プランをプランナーが作成し、積み付け計画作成システムを介して現場に流通する。

この実証実験では、DAシステムに入力する問題のサイズは数万ビット規模であったが、顧客要請を満足する動作パラメータを使用することで短時間に制約条件を満足する解を得ることが出来た。その結果、これまでベテランのプランナーが1隻あたり最大約6時間を要していた積み付け計画作成業務を、約2.5時間に短縮することを実現し、積み付け計画作成業務の中で最も重要な席割り作業(様々な条件を考慮し車両の最適積載位置を計画する作業)を約30分で完了させることが出来るようになった。

これにより、プランナーが積み付け計画作成に要する時間を年間4,000時間以上削減でき、その効果として、意思決定の迅速化がもたらすビジネスチャンスの拡大が見込まれる。また、急な計画変更へのより効率的な対応の実現や、プランナーの経験の違いによる積み付け計画の品質のバラつきを抑えるといった効果も期待できる。

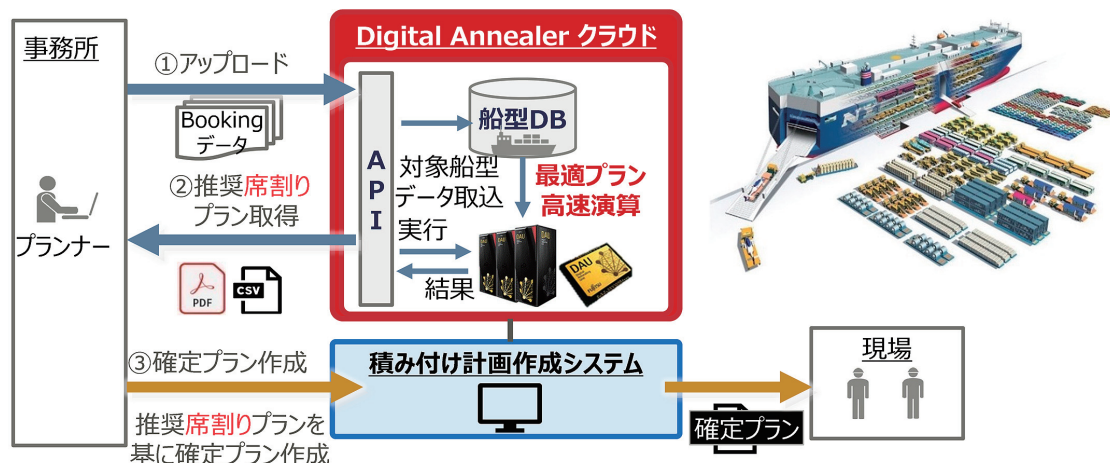


図4 DAシステムを用いた自動車専用船積み付け計画システム

## 5. まとめ

本稿では量子インスパイアードマシンとして誕生したデジタルアニーラを実社会の課題に適用する際に必要となるDAシステムについて述べた。このシステムにより、最大100,000ビットまでアニーリングコアが動作し、実用的な組合せ最適化問題で頻出する1hot制約および不等式制約を活用した探索が可能となった。またQAPを用いた性能評価は、DAシステムが商用ソルバ (Gurobi, Local Solver) と比較して高い性能を示しており、制約条件を有する実問題における有用性を示唆している。

現在までに物流[17]・創薬[18]・材料[19]の分野の実問題求解に向けたDAシステムの利用が始まっており、本稿でも述べたように自動車専用船の積み付け問題のような顧客の実業務において有効性が実証されてきている。今後もより多くの組合せ最適化問題での活用が広がることを期待する。

## 参考文献

- [1] M. W. Johnson, M. H. S. Amin, S. Gildert, T. Lanting, F. Hamze, N. Dickson, R. Harris, A. J. Berkley, J. Johansson, P. Bunyk, E. M. Chapple, C. Enderud, J. P. Hilton, K. Karimi, E. Ladizinsky, N. Ladizinsky, T. Oh, I. Perminov, C. Rich, M. C. Thom, E. Tolkacheva, C. J. S. Truncik, S. Uchaikin, J. Wang, B. Wilson and G. Rose, “Quantum annealing with manufactured spins,” *Nature*, 473, pp. 194–198, 2011.
- [2] T. Kadowaki and H. Nishimori, “Quantum annealing in the transverse Ising model,” *Physical Review B*, 58, pp. 5333–5363, 1998.
- [3] P. I. Bunyk, E. M. Hoskinson, M. W. Johnson, E. Tolkacheva, F. Altomare, A. J. Berkley, R. Harris, J. P. Hilton, T. Lanting, A. J. Przybysz and J. Whittaker, “Architectural considerations in the design of a superconducting quantum annealing processor,” *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, 24, 1700110, 2014.
- [4] M. Yamaoka, C. Yoshimura, M. Hayashi, T. Okuyama, H. Aoki and H. Mizuno, “20k-spin Ising chip for combinatorial optimization problem with CMOS annealing,” In *Proceedings of 2015 International Solid-State Circuits Conference (ISSCC2015)*, p. 432, 2015.
- [5] T. Okuyama, T. Sonobe, K. Kawarabayashi and M. Yamaoka, “Binary optimization by momentum annealing,” *Physical Reviews E*, 100, 012111, 2019.
- [6] T. Inagaki, Y. Haribara, K. Igarashi, T. Sonobe, S. Tamate, T. Honjo, A. Marandi, P. L. McMahon, T. Umeki, K. Enbutsu, O. Tadanaga, H. Takenouchi, K. Aihara, K.-I. Kawarabayashi, K. Inoue, S. Utsunomiya and H. Takesue, “A coherent Ising machine for 2 0 0 0 -node optimization problems,” *Science*, 354, pp. 603–606, 2016.
- [7] H. Goto, K. Tatsumura and A. R. Dixon, “Combinatorial optimization by simulating adiabatic bifurcations in nonlinear Hamiltonian systems,” *Science Advance*, 5, eaav2372, 2019.
- [8] M. Aramon, G. Rosenberg, E. Valiante, T. Miyazawa, H. Tamura and H. G. Kartzgraber, “Physics-inspired optimization for quadratic unconstrained problems using a Digital Annealer,” *Frontiers in Physics*, 7, 48, 2019.
- [9] S. Matsubara, M. Takatsu, T. Miyazawa, T. Shibasaki, Y. Watanabe, K. Takemoto and H.

- Tamura, “Digital annealer for high-speed solving of combinatorial optimization problems and its applications,” In Proceedings of 2020 25th Asia and South Pacific Design Automation Conference (ASPDAC), pp. 667–672, 2020.
- [10] K. Hukushima and K. Nemoto, “Exchange Monte carlo method and application to spinglass simulations,” Journal of the Physical Society of Japan, 65, pp. 1604–1608, 1996.
  - [11] Fred Glover, Gary Kochenberger, and Yu Du, “Quantum bridge analytics I: A tutorial on formulating and using QUBO models,” 4OR: A Quarterly Journal of Operations Research, Vol. 17, No. 4, pp. 335–371, 2019.
  - [12] R. E. Burkard, S. E. Karisch and F. Rendl “QAPLIB – A quadratic assignment problem library,” Journal of Global Optimization, 10, pp. 391–403, 1997.
  - [13] Gurobi, The Fastest Solver - Gurobi, <https://www.gurobi.com/> (2022年3月14日閲覧)
  - [14] LocalSolver, The Fastest Solver for Supply Chain Optimization, <https://www.localsolver.com> (2022年3月14日閲覧)
  - [15] LocalSolver, Quadratic Assignment Problem (QAP), <https://www.localsolver.com/benchmarkqap.html> (2022年3月14日閲覧)
  - [16] 日本郵船, 「デジタルアニーラ」で自動車専用船の積み付け計画作成業務を効率化, [https://www.nyk.com/news/2021/20210902\\_01.html](https://www.nyk.com/news/2021/20210902_01.html) (2022年3月14日閲覧)
  - [17] トヨタシステムズ, 「デジタルアニーラ」を活用し大規模物流の効率化を共同で実証— 300万を超える物流ルートから有効なルートを求解—, <https://www.toyotasystems.com/news/2020/09/post-24.html> (2022年3月14日閲覧)
  - [18] ペプチドリーム, 富士通, 高速かつ高精度に中分子医薬品候補化合物の探索を実現「デジタルアニーラ」の活用で創薬プロセスの大幅な短縮を目指す, <https://contents.xj-storage.jp/xcontents/45870/dfe9ccc1/c595/48e8/9d7d/d9f12bdce2a9/20201013113651931s.pdf> (2022年3月14日閲覧)
  - [19] 昭和電工, 量子コンピューティング技術の活用により半導体材料の最適配合探索の大幅な高速化を実現, <https://www.sdk.co.jp/news/2022/41712.html> (2022年3月14日閲覧)